

# Закон Вальраса и конкурентное равновесие в модели децентрализованной экономики

Байбеков Виктор, 61ММАЭ

Рассмотрим модель децентрализованной экономики, в которой производится  $n$  товаров (факторов), определяемых в пространстве  $R^n$ . Все субъекты делятся на производителей и потребителей.

Существует  $l$  производителей, каждый из которых описывается своим технологическим множеством  $Y_k \in R^n, k = 1..l$ , и выбирает технологию  $y_k \in Y_k$ . Множество  $Y_k$  – замкнутое, выпуклое, и допускает бездействие фирм, т.е.  $\vec{0} \in Y_k$ .

Технологическое множество всей экономики задается суммой множеств каждого производителя:  $Y = \sum_{k=1}^l Y_k$ . На данное производственное множество накладываются следующие ограничения:

1.  $Y \cap R_+^n = \{0\}$  – отсутствие рога изобилия, т.е. невозможность произвести что-то без затрат ресурсов.
2.  $Y \cap (-Y) = \{0\}$  – необратимость производства, недопустимость обратных технологий.

При сделанных предположениях множество  $Y$  является замкнутым.

Существуют  $m$  потребителей, каждый из которых может делать  $x_i$  выбор в своем потребительском множестве  $X_i \in R^n, i = 1..m$ . Множество  $X_i$  является выпуклым, замкнутым, и ограниченным снизу, т.е.  $\exists c_i \in R^n : x_i \leq c_i \forall x_i \in X_i$ .

Для каждого потребителя существует вогнутая и непрерывная функция полезности  $U_i(x_i)$ . У каждого потребителя также есть некоторая начальная собственность  $a_i$  и нетрудовой доход  $r_i(p)$ , однородный первой степени по ценам, т.е.  $r_i(\lambda p) = \lambda r_i(p)$ .

Распределение потребления и производства задается вектором  $\omega = (x_1, ..., x_m; y_1, ..., y_l)$ , которое является допустимым, если  $\sum_i x_i \leq \sum_k y_k + \sum_i a_i$ .

Множество всех допустимых распределений  $\omega$  обозначается  $Q$ , которое является непустым  $Q \neq \emptyset$ , так как экономика способна работать. Множество  $Q$  является выпуклым, замкнутым и ограниченным. Первые два свойства следуют из выпуклости и замкнутости  $X_i$  и  $Y_i$ . Ограниченность  $Q$  означает, что можно указать выпуклый компакт всех возможных распределений  $B$  такой, что  $\forall \omega \in Q \quad x_i \in \text{int } B, y_k \in \text{int } B \forall i, k$ , таким образом можно в дальнейшем рассматривать только допустимые технологические  $T_k = Y_k \cap B$  и потребительские  $M_i = X_i \cap B$  множества.

Каждому распределению  $\omega \in Q$  соответствует его оценка потребителями  $\{U_1(x_1), ..., U_m(x_m)\}$ , для которой можно рассчитать значение критерия эффективности.  $y_k$  не влияет на эффективность распределения, но влияет на допустимость.

**Теорема о благосостоянии.**  $\bar{x}_i \in X_i$  называется точкой насыщения, если в ней достигается абсолютный максимум полезности на всем потребительском множестве:

$$U_i(\bar{x}_i) \geq U_i(x_i) \forall x_i \in X_i$$

Пусть  $\bar{\omega} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l\}$  – допустимое и эффективное распределение, и  $\forall \bar{x}$  не являются точками насыщения. Тогда  $\exists \bar{p} \geq 0, \neq 0$  (вектор не сплошь нулевых цен) такой, что

1.  $\bar{p} \sum_i x_i = \bar{p} \left( \sum_k \bar{y}_k + \sum_i a_i \right)$
2.  $\bar{p} \bar{y}_k \geq \bar{p} y_k, \forall y_k \in Y_k, k = 1 \dots l$
3.  $\bar{p} \bar{x}_i = \min \{ \bar{p} x_i \mid x_i \in X_i, U_i(x_i) \geq U_i(\bar{x}_i) \}$

Те существует вектор цен, при котором потребители максимизируют полезность, все товары раскупаются – на рынке конкурентное равновесие, и при прочих равных условиях потребители экономят деньги.

Т.к.  $\bar{\omega}$  является эффективным и допустимым, то по теореме о свертке критериев существует набор  $\exists \gamma_1, \dots, \gamma_m \geq 0, \neq 0$  такой, что  $\bar{\omega}$  является решением задачи

$\max \left\{ \sum_i \gamma_i U_i(x_i) \mid x_i \in X_i, y_i \in Y_i \right\}$ , и  $\sum_k y_k - \sum_i x_i - \sum_i a_i \geq 0$ . Т.к.  $U_i(x_i)$  вогнутые,  $\gamma_i \geq 0$ , то  $\sum_i \gamma_i U_i(x_i)$  – вогнутая функция, а ограничения  $x_i, y_i$  выпуклы и замкнуты, то данная задача максимизации является задачей выпуклого программирования.

Теорема о благосостоянии говорит, что каждое конкурентное распределение оптимально по Парето, и что для любого допустимого распределения можно найти вектор цен, при котором данное распределение будет конкурентным.

*Каждое конкурентное равновесие в децентрализованной экономике входит в ядро экономики.* Чтобы построить ядро такой экономики, необходимо сделать дополнительное предположение о распределении производства между потребителями. В **модели Эрроу-Дебре** каждому потребителю  $i$  принадлежит некоторая доля в производстве  $k$ :  $\alpha_{ik} \geq 0$ , причем  $\sum_i \alpha_{ik} = 1, k = 1 \dots l$ .

Каждая коалиция  $S \subset \{1 \dots m\}$  может реализовать суммарную технологию  $y_s = \sum_k \sum_{i \in S} \alpha_{ik} y_k$ . Коалиция действует только в интересах своих членов, распределение  $\omega_s = \{x_i, i \in S; y \in Y_s\}$  является допустимым для коалиции, если  $x_i \in X_i, i \in S$  и  $\sum_{i \in S} x_i \leq y_s + a_s$ .

Любое распределение в экономике  $\omega = (x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_l)$  будет заблокировано коалицией  $S$ , если, пользуясь только своими ресурсами, она может добиться для своих участников распределения  $w_s$ , которое будет не хуже для всех участников и хотя бы для одного строго лучше. Множество всех распределений  $w_s$ , которые не блокируются ни одной коалицией, называется ядром экономики.

Любое распределение из ядра Парето-эффективно, иначе его заблокировала бы коалиция из всех  $m$  участников. Распределения из ядра являются также индивидуально рациональными, иначе коалиции из одного участника могли бы заблокировать эти распределения.

**Конкурентное равновесие** в децентрализованной экономике является результатом независимого конкурентного принятия решений производителями и потребителями, каждый из которых максимизирует свою целевую функцию – прибыль и полезность – при заданных ценах.

Производитель решает задачу максимизации прибыли:  $\phi_k = \max \{py_k \mid y_k \in Y_k\}$ . Обозначим  $S_k(p)$  множество технологий, на котором реализуется данный максимум. Так как мы рассматриваем только допустимые технологические множества, то

$$S_k(p) = \arg \max(p y_k, y_k \in T_k)$$

Т.к.  $Y_k, T_k$  выпуклые и замкнутые, то  $\phi_k$  заведомо конечно и определено для любых цен  $p$ , и  $S_k(p)$  является непустым выпуклым компактом.  $S_k(p) \in T_k$  является точечно-множественным отображением, график которого  $S_k(p) = \{(p, y_k) \mid y_k \in S_k(p)\}$  является замкнутым.

$S_k(p)$  однородно нулевой степени по  $p$ , т.е.  $S_k(\lambda p) = S_k(p) \forall \lambda > 0$ ,  $\phi_k(p)$  однородна первой степени по  $p$ , т.е.  $\phi_k(\lambda p) = \lambda \phi_k(p)$ , поэтому цены можно нормировать. Обычно в качестве цен используется стандартный симплекс  $P = \{p \geq 0 \mid \sum p_i = 1\}$ .

$S(p) = \sum_k S_k(p)$  – векторная сумма индивидуальных максимизирующих прибыль технологических множеств – обладает теми же свойствами, что и  $S_k(p)$ , то есть является непустым выпуклым компактом с замкнутым графиком  $S(p) = \{(p, y) \mid p \in P, y \in S(p)\}$ .

Потребитель делает выбор на допустимом потребительском множестве  $M_i = X_i \cap B$ . У каждого потребителя есть начальная собственность  $a_i$  и нетрудовой доход  $r_i(p)$ , получаемый от владения долями производства. Потребитель максимизирует полезность при бюджетном ограничении:  $\max \{U_i(x_i) \mid x_i \in M_i, p x_i \leq r_i(p) + p a_i\}$ . Бюджетное ограничение однородно нулевой степени по ценам, при изменении которых выбор  $x_i$  не изменяется.

Обозначим  $D_i(p)$  – множество точек, на которых достигается потребительский максимум. Однако мы не можем гарантировать совместность ограничений  $x_i \in M_i, p x_i \leq r_i(p) + p a_i$ , поэтому дополнительно налагаем условие об отсутствии нищих:  $\forall p \in P \exists x_i \in M_i : p x_i < r_i(p) + p a_i$ , которое фактически является условием регулярности Слейтера.

$\forall p \ D_i(p)$  – непустой выпуклый компакт. Отображение  $D_i(p)$  имеет замкнутый график.

$D(p) = \sum_i D_i(p)$  также имеет замкнутый график  $(p, x) : x \in D(p)$ .

В модели Эрроу-Дебре  $r_i(p) = \sum_k \alpha_{ik} \phi_k(p)$ . В общем случае  $r_i(p) = R_i(\phi_1(p), \dots, \phi_l(p))$ ,  $R_i \geq 0$  и  $\sum_i R_i(p) = \sum_k \phi_k(p)$ , то есть  $\sum_i r_i(p) = \sum_k \phi_k(p)$ .

Избыточный спрос экономики равен  $E(p) = D(p) - S(p) - \sum_i a_i$  – точечно-множественное отображение со свойствами  $S(p)$  и  $D(p)$ .

В экономике выполняется **закон Вальраса**:

$$p \sum_i x_i(p) \leq \sum_i r_i(p) + p \sum_i a_i = \sum_k \phi_k(p) + p \sum_i a_i = p \sum_k y_k + p \sum_i a_i$$

$$p \left( \underbrace{\sum_i x_i(p) - \sum_k y_k - \sum_i a_i}_Z \right) \leq 0$$

$\forall p \in P, \forall z \in E(p)$  выполняется закон Вальраса в слабой форме:  $pz \leq 0$ . Если предпочтения ненасыщаемы, то бюджетное ограничение будет выполнено как равенство в точке максимума полезности, и закон Вальраса будет выполнен в сильной форме:  $pz = 0$ .

Теорема о существовании конкурентного равновесия говорит о существовании равновесных цен, которые делают избыточный спрос неположительным.

$$x_i, y_k \in B, z = \sum_i x_i(p) - \sum_k y_k - \sum_i a_i$$

$$Z = (\underbrace{B + B + \dots B}_{m+l}) - \sum_i a_i \quad - \text{ настолько большой вектор, что в него входят}$$

всевозможные векторы избыточного спроса.

Зададим отображение  $F(z): \forall z \in Z \quad F(z) \left\{ p \in P \mid pz \geq pz \forall p \in P \right\}$ , которое имеет все свойства для применения теоремы Неймана.

Тогда по теореме Неймана найдутся

$$(\bar{p}, \bar{z}) \in P \times Z, \bar{z} \in E(p), \bar{p} \in F(\bar{z}) \sim \bar{p}\bar{z} \geq pz \forall p \in P$$

$\bar{p}\bar{z} \leq 0$  в силу закона Вальраса. В качестве цен мы можем взять орты, т.е.  $p = e_j^T$ , тогда  $0 \geq \bar{p}\bar{z} \geq z_j$ , откуда получаем искомое равновесие  $(\bar{p}, \bar{z})$ .

Доказательство существования конкурентного равновесия было сделано для исходной модели, в которой выполнены предпосылки отсутствия рога изобилия, невозможности обратимого производства, существовании допустимых распределений ( $Q \neq \emptyset$ ) и условии отсутствия нищих.

При заданных ценах  $\bar{p}$  в задачах каждого производителя и потребителя условие принадлежности выбранного распределения компакту  $B$  несущественно, и выбор  $x_i, y_i$  останется оптимальным и без урезания исходных множеств  $Y_k, X_i$ .